Übungsaufgaben zur Analysis

Jochen Voß <voss@seehuhn.de>

14. Dezember 2009

Als Übungsgruppenleiter habe ich unzählige Übungsaufgaben zur Analysis gestellt. Einige davon, von denen ich denke, dass sie wiederverwendbar sind, habe ich hier zusammengestellt. Die meisten Aufgaben stammen aus den Übungen zu den Vorlesungen Analysis I und Analysis II, die Prof. H. v. Weizsäcker im Wintersemester 1999/2000 und im Sommersemester 2000 an der Universität Kaiserslautern gehalten hat.

Inhaltsverzeichnis

Die Aufgaben sind thematisch in die genannten Kapitel eingeordnet. Innerhalb der Kapitel gibt es keine bestimmte Ordnung. Leichte und schwierige Aufgaben sind gemischt. Die Reihenfolge in der die Aufgaben abgedruckt sind ist nicht die Reihenfolge, in der man die Aufgaben in einer Vorlesung stellen sollte. Z.B. finden sich am Ende des Kapitels über Folgen und Reihen Aufgaben, bei denen Ableitungen verwendet werden.

Ich habe mich bemüht, sinnvolle und fehlerfreie Aufgaben zusammenzutragen. Dennoch ist sicherlich der eine oder andere Irrtum zurückgeblieben. Über Hinweise, Verbesserungsvorschläge und weitere interessante Aufgaben würde ich mich freuen.

1 Allgemeines

Hier habe ich diejenigen Aufgaben zusammengefaßt, die sich in keinen der restlichen Abschnitte gut einfügen ließen. Besonders Aufgabe 1 hat sich in der Praxis als überraschend nützlich herausgestellt.

Aufgabe 1. In der Mathematik ist es ein weit verbreitetes Problem, dass man Mühe hat, geeignete Buchstaben für Bezeichnungen zu finden. Um das Repertoire zu vergrößern, ist folgende Aufgabe nützlich: Finde heraus, wie die Buchstaben des griechischen Alphabets aussehen. Fertige ein Liste aller griechischen Groß- und Kleinbuchstaben inklusive Namen an.

Aufgabe 2. Seien A und B endliche Mengen. Zeige, dass aus je zwei der folgenden Aussagen die dritte folgt: (1) Es gibt eine injektive Abbildung von A nach B. (2) Es gibt eine surjektive Abbildung von A nach B. (3) Es gilt $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

Aufgabe 3. Seien A und B zwei Mengen, für die sowohl eine injektive Abbildung $f\colon A \to B$ als auch eine injektive Abbildung $g\colon B \to A$ existiert. Zeige, dass es dann eine bijektive Abbildung φ von A nach B gibt.

Tip: Man könnte zum Beispiel rekursiv folgende Mengen definieren: $A_0 := A$, $B_0 := B$, und weiter $A_n := g(B_{n-1})$ und $B_n := f(A_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann kann man $\Delta A_n := A_{n-1} \setminus A_n$ für alle n setzen, und φ auf den Blöcken ΔA_n einzeln definieren. Und danach kann man sich noch um den Teil von A kümmern, der nicht von den ΔA_n abgedeckt wird.

Aufgabe 4. Die **Cantormenge** kann man durch folgende Prozedur definieren: Zuerst definieren wir ein Folge $(\mathbb{C}_n)$ von Mengen, so dass jedes $\mathbb{C}_n$ genau 2^n abgeschlossene Intervalle der Länge 3^{-n} enthält: Setze dazu $\mathbb{C}_0 := \big\{[0;1]\big\}$. Ist nun $\mathbb{C}_n$ schon eine solche Menge von Intervallen, so erhält man die Intervalle für $\mathbb{C}_{n+1}$ folgendermaßen: aus jedem der 2^n Intervalle von $\mathbb{C}_n$ erhält man zwei abgeschlossene Intervalle — das linke und das rechte Drittel — indem man das offene mittlere Drittel entfernt. Diese $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Intervalle bilden die Elemente von $\mathbb{C}_{n+1}$. Die Cantormenge ist dann

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Big\{x \,\Big|\, x \in I \text{ für ein } I \in \mathbb{C}_n\Big\}.$$

a) Zeige, dass $C \neq \emptyset$ gilt und dass C sogar überabzählbar ist.

b) Zeige, dass das Komplement $[0;1] \setminus C$ die Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle ist. Seien $(a_n; b_n)$ diese Intervalle. Zeige, dass dann $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n - a_n = 1$ gilt, d.h. dass die Gesamtlänge des Komplements 1 beträgt.

c) Zeige $C = \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i 3^{-i} \,\Big|\, \varepsilon_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i\Big\}$.

Aufgabe 5. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien $p_0, p_1, \ldots, p_n$ Polynome mit

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) e^{kx} = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $p_k = 0$ für alle k.

Aufgabe 6. (Stirlingsche Formel) Hier wollen wir die Beziehung

$$n! \sim C \cdot n^{n+1/2} e^{-n}$$

für ein $C > 0$ beweisen. Dazu setze $f(x) := \log(k)$ falls $k - 1/2 \leq x < k + 1/2$ für $k \in \mathbb{N}$.

a) Beweise

$$\log(n!) - \Big((n + 1/2)\log(n) - n\Big) = \int_{1/2}^{n} f(x)\, dx - \int_{1/2}^{n} \log(x)\, dx + \text{const.}$$

b) Zeige, dass die rechte Seite aus a) für $n \to \infty$ konvergiert (Tip: alternierende Reihe).

c) Folgere, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}}$$

existiert und echt positiv ist.

Aufgabe 7. Der Wert $\binom{2n}{n}/2^{2n}$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei $2n$ Münzwürfen $n$mal Kopf zu erhalten. Drücke das asymptotische Verhalten dieser Größe einmal mittels der Stirlingformel aus der vorangehenden Aufgabe und einmal mittels des Wallisschen Produkts aus und bestimme daraus den Wert der Konstanten in der Stirlingformel.

Aufgabe 8. Sie $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften: (1) Es gibt eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. (2) Es gibt eine Funktion $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = g(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. (3) $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass dies genau dann erfüllt ist, wenn es Zahlen $a > 0, b \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = a \cdot \exp(b \cdot x^2)$ gibt.

Aufgabe 9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ist die kleinste Zahl $\beta_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, v_i\, v_j \;\leq\; \beta_n \cdot \max_{i,j} |c_{ij}| \cdot \|v\|^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle Matrizen $c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt?

Aufgabe 10. Durch die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\varphi(a + ib) \;=\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

erhält man eine Bijektion der komplexen Zahlen auf die 2×2-Matrizen der obigen Gestalt. Für Matrizen A kann man mit Hilfe der Potenzreihe die Matrix e^A bestimmen. Zeige, dass $e^{\varphi(z)} = \varphi(e^z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

2 Die reellen Zahlen

Hier finden sich Aufgaben, die sich in irgendeiner Form mit der Struktur der Menge der reellen Zahlen befassen. Themen sind die kanonischen Ordnung auf $\mathbb{R}$ und Suprema und Infima.

Aufgabe 11. Beweise folgende Ungleichung: Es gilt $4ab \leq (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12. Seien $a, x \in \mathbb{R}$ und $x < a + \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Zeige, dass dann auch $x \leq a$ gilt.

Aufgabe 13. Bestimme die größte Zahl γ, so dass

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \;\geq\; \gamma\Big(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_n + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 14. Zeige, dass $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 15. Zeige, dass $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 16. Zeige, dass $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \geq 1$ für alle $x > 0$ gilt.

Aufgabe 17. Beweise die folgende Mengengleichheit.

$$[0; 1) \;=\; \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \text{es existiert ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in [0; 1 - \tfrac{1}{n}]\;\Big\}$$

Aufgabe 18. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Man beweise für beliebige a_i und positive b_i die Ungleichung

$$\min_{1\leq i\leq n} \frac{a_i}{b_i} \;\leq\; \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \;\leq\; \max_{1\leq i\leq n} \frac{a_i}{b_i}.$$

Aufgabe 19. Zeige, dass folgende Aussage zum Supremumsaxiom äquivalent ist: Ist I_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ und gilt für $k > l$ stets $I_k \subseteq I_l$, so gibt es eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, die in all diesen Intervallen I_n enthalten ist.

Aufgabe 20. Zeige, dass $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ für alle $a, b > 0$ gilt.

Aufgabe 21. Sei x eine reelle Zahl, die eine schließlich periodische Dezimaldarstellung besitzt. Zeige, dass x dann rational ist.

Aufgabe 22. Beweise $[0; 1) = \{ x^{18} \mid x \in (-1; 1) \}$.

Aufgabe 23. a) Berechne die Darstellung von $7/10$ als Dualbruch.

b) Berechne ohne Verwendung eines Computers die ersten 3 Ziffern der triadischen Darstellung von $\sqrt{5}$.

Aufgabe 24. Zeige, dass jede Folge reeller Zahlen eine monotone (wachsende oder fallende) Teilfolge besitzt. Benutze dies für einen alternativen Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 25. Zeige, dass die Menge $\{ l/m^3 \mid l, m \in \mathbb{N}, m^2 - m \le l \le m^2 + m\}$ abzählbar unendlich ist. Bestimme die Menge aller Häufungspunkte einer (injektiven) Abzählung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von M.

Aufgabe 26. Gibt es eine stetige, injektive Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Aufgabe 27. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Zeige, dass es dann abzählbar viele offene Kugeln $K_{r_n}(x_n)$ gibt, so dass $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{r_n}(x_n)$ ist. Zeige weiter, dass man die „Kugeln“ im Falle $d = 1$ disjunkt wählen kann.

3 Folgen, Reihen und Grenzwerte

Hier gibt es Aufgaben zu Folgen und Reihen. Ich habe fast keine Aufgaben der Form „berechne den Grenzwert der Folge …“ aufgeführt, da es leicht ist, sich solche Aufgaben selbst auszudenken. Die Aufgaben über Folgen stehen vorne, dann kommen Aufgaben über Reihen, und am Kapitelende gibt es ein paar Aufgaben über Grenzwerte von Funktionen mit kontinuierlichem Wertebereich.

Aufgabe 28. Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 := 0$, $a_2 := 1$ und

$$a_{n+2} := \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bestimme den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 29. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, deren Grenzwert existiert. Zeige, dass dann auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

existiert, und dass beide Grenzwerte übereinstimmen.

Aufgabe 30. (Regel von de l'Hospital) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei wachsende, unbeschränkte Folgen mit $b_n \neq b_{n-1}$ für alle n, so dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

existiert. Zeige, dass dann auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

existiert, und dass beide Grenzwerte übereinstimmen.

Aufgabe 31. Zwei Cauchyfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißen in dieser Aufgabe äquivalent, falls $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Der Ausdruck $\left[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ bezeichne die Äquivalenzklasse von (a_n), und $\mathcal{R}$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Dann definiere die Relation $<$ auf $\mathcal{R}$ durch

$$\left[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] < \left[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gilt schließlich } a_n < b_n \text{ und es ist } [a] \neq [b].$$

Finde eine Bijektion $\varphi\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(a) < \varphi(b) \qquad \text{für alle } a, b \in \mathcal{R}.$$

Aufgabe 32. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit Werten in $\mathbb{N}$. Dann definiere die Folgen (p_n) und (q_n) durch $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$ und $p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1}$, sowie $q_{-1} = 1$, $q_0 = 0$ und $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zuletzt setze noch $f_n(a_0, a_1, a_2, \ldots) := p_n/q_n$.

a) Rechtfertige folgende Kurzschreibweise für $\lim_{n\to\infty} f_n(a_0, a_1, \ldots)$:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

b) Zeige, dass der folgende Grenzwert existiert, und berechne ihn.

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Aufgabe 33. Sei $0 < b_0 \leq a_0$. Zeige, dass die durch

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

definierten Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Aufgabe 34. Sei $f\colon [a; b] \to [a; b]$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung. Es gelte $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a; b]$. Weiter sei $x_0 \in [a; b]$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $x_n = f(x_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

a) Es gibt genau ein $x^* \in [a; b]$ mit $f(x^*) = x^*$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

b) Es gibt Zahlen $C \geq 0$ und $q \in [0; 1)$ mit $|x_n - x^*| \leq Cq^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Finde geeignete Zahlen C und q für die Funktion $\cos\colon [0; 1] \to [0; 1]$.

Aufgabe 35. Sei $f\colon [a; b] \to [a; b]$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in (a; b)$. Weiter sei $x_0 \in [a; b]$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $x_n = f(x_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

a) Es gibt genau ein $x^* \in [a; b]$ mit $f(x^*) = x^*$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

b) Zeige, dass es für die Funktion $\sin\colon [0; 1] \to [0; 1]$ keine Zahlen $C \geq 0$ und $q \in [0; 1)$ mit $|x_n - x^*| \leq Cq^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 36. Auf eine Walze mit 4 cm Durchmesser ist ein 35 m langes Band aufgewickelt. Die Dicke des Bandes beträgt 0,2 mm. Wie dick wird die entstehende Rolle?

Aufgabe 37. Achilles und die Schildkröte machen Wettrennen. Da Achilles schneller als die Schildkröte ist, bekommt diese 10 Meter Vorsprung. Aber nun ist es so, dass die Schildkröte schon einen Meter vorangekrabbelt ist, bis Achilles ihren Startpunkt erreicht hat. Und bis Achilles diesen neuen Punkt erreicht hat, ist die Schildkröte zehn weitere Zentimeter vorangekommen. Dies setzt sich immer weiter fort. Wieso kann Achilles die Schildkröte trotzdem einholen?

Aufgabe 38. Ein Jäger läuft von seinem 5 km entfernten Hochsitz nach Hause. Dazu braucht er eine Stunde. Sein Hund ist ungeduldig und läuft voraus; am Haus angekommen dreht er um und läuft zurück zum Jäger, dann wieder zum Haus, und zurück zum Jäger und immer so weiter. Der Hund ist doppelt so schnell, wie der Jäger. Wie weit ist der Hund gelaufen, wenn der Jäger am Haus ankommt?

Aufgabe 39. Berechne den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{n+1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimme daraus den Wert der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{n^2(n-1)^2}.$$

Aufgabe 40. Beweise, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$ gilt.

Aufgabe 41. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert. Zeige, dass dann die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ mit $x^+ := \max(x, 0)$ und $x^- := \max(-x, 0)$ divergieren.

Aufgabe 42. a) Zeige, dass $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ genau dann absolut konvergent ist, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$, so dass $\sum_{j\in J} |x_j| < \varepsilon$ für alle endlichen Teilmangen $J \subset \mathbb{N} \setminus I$ gilt.

b) Zeige, dass in diesem Falle $\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n\in I} x_n\right| \leq \varepsilon$ gilt.

c) Gebe mit Hilfe dieser Ergebnisse einen neuen Beweis des Umordnungssatzes an.

Aufgabe 43. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k}$.

a) Zeige, dass für $\alpha \in \mathbb{N}$ und $n \leq \alpha$ die Definition von $\binom{\alpha}{n}$ gerade die Binomialkoeffizienten ergibt.

b) Bestimme die Taylor-Reihe für $(1+x)^\alpha$ im Punkt 0.

c) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Zeige, dass die Reihe für alle $x \in (-1; 1)$ konvergiert.

d) Zeige, dass $f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x)$ für alle $x \in (-1; 1)$ gilt.

e) Folgere daraus, dass $(1+x)^{-\alpha} f(x) = 1$ ist, d.h. dass $f(x) = (1+x)^\alpha$ für alle $x \in (-1; 1)$ gilt.

Aufgabe 44. Sei $f(x) := 1$ falls $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) := 0$ sonst. Berechne $\limsup\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Aufgabe 45. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_n = 1$, falls n Primzahl ist, $x_n = -1$ falls n Quadratzahl ist, und $x_n = 0$ sonst definiert. Berechne $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 46. Berechne

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{2+\cos(x)/x}, \qquad \limsup_{x\downarrow 0}\ \sin(1/x) \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} n\cdot\cos(n).$$

Aufgabe 47. a) Zeichne für $p = 1, 2, 4, \infty$ die Einheitskreise der p-Normen in der Ebene, d.h. die Mengen $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|x\|_p = 1\right\}$.

b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Abbildung $p \mapsto \|x\|_p$ monoton fallend ist, und dass $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ gilt.

Aufgabe 48. Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechne

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{\varepsilon}} \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx.$$

Aufgabe 49. Seien $f_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ Funktionen und $\alpha_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k &\geq \max_{k=1,\ldots,n} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log f_k(t) \quad \text{und} \\ \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k &= \max_{k=1,\ldots,n} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log f_k(t). \end{aligned}$$

4 Stetigkeit

Aufgaben über Stetigkeit. Die meisten Aufgaben hier handeln von Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 50. In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen stetig, in welchen unstetig?

a) Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist, und} \\ 1/q, & \text{falls } x = p/q \text{ mit } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

b) Sei $\varphi\colon \mathbb{N} \to [0; 1]$ eine injektive Abzählung der rationalen Zahlen aus dem Intervall $[0; 1]$. Dann betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 1_{(-\infty;x]}\big(\varphi(n)\big).$$

c) Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n, & \text{falls } |x| \le 1, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 51. Sei $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Sägezahnfunktion und $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = S(1/x)$ für alle $x \neq 0$. Zeige, dass f nicht die Einschränkung einer stetigen Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein kann.

Aufgabe 52. Sei $f\colon [0; 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) = f(x^2)$ für alle $x \in [0; 1]$. Zeige, dass f dann konstant ist.

Aufgabe 53. Sei $f\colon [0; 1] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.

a) Zeige, dass für f die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ und $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ existieren.

b) Beweise, dass die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f abzählbar ist.

Aufgabe 54. Sei $C > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\big|f(x) - f(y)\big| \le C \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig.

Aufgabe 55. Seien f und g zwei stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle rationalen Zahlen x. Dann ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 56. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $A, B \subseteq X$ zwei abgeschlossene Mengen mit $A \cup B = X$. Weiter sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so dass die Einschränkungen $f|_A$ und $f|_B$ von f auf die Mengen A bzw. B stetig sind. Zeige, dass dann auch f stetig ist.

Aufgabe 57. Überprüfe, ob die folgenden beiden Funktionen im Ursprung stetig sind:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0, \text{ und} \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0, \text{ und} \\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 58. Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\operatorname{graph}(f) = \big\{(x, f(x)) \,\big|\, x \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

a) Finde ein unstetiges $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{graph}(f)$ abgeschlossen ist.

b) Zeige, dass $\operatorname{graph}(f)$ in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist, falls f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

c) Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, wenn jedes Bild einer offenen Menge offen ist. Finde je ein Beispiel für eine offene Abbildung und eine stetige, aber nicht offene Abbildung.

5 Konvexität

Hier habe ich Aufgaben zusammengestellt, die von konvexen Mengen, konvexen Funktionen und dem Zusammenhang zwischen ihnen handeln. Am Ende des Kapitels gibt es auch einige Aufgaben über die Legende-Transformation.

Aufgabe 59. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls für jedes Paar von Punkten $x, y \in M$ auch die Verbindungslinie zwischen x und y vollständig in M enthalten ist, d.h. falls $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$ für alle $\lambda \in [0;1]$ und alle $x, y \in M$ gilt.

Zu beweisen ist nun folgende Charakterisierung von Konvexität: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in M$ für alle $\lambda_i \in [0;1]$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ und für alle $x_1, \ldots, x_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 60. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) f ist genau dann konvex, wenn die Menge $\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\,\}$ konvex ist.

b) Sei nun f konvex, $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in [0;1]$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i)$

Aufgabe 61. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann hat f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ eine rechtsseitige und linksseitige Ableitung, d.h. die Grenzwerte

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \qquad \text{und} \qquad \lim_{\xi \uparrow 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existieren.

Aufgabe 62. Sei $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f in allen Punkten $x \in (a;b)$ stetig.

Aufgabe 63. Sei $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ konvex. Dann hat f in mindestens einem der beiden Randpunkte a und b ein globales Maximum.

Aufgabe 64. Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

a) Ist f konvex, so ist die Hessematrix $\mathrm{Hess}_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ positiv semidefinit.

b) Ist $\mathrm{Hess}_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ positiv definit, so ist f strikt konvex.

Aufgabe 65. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die **Legendre-Transformierte** von f ist die Funktion $f^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(\langle y, x\rangle - f(x)\big).$$

a) Zeige, dass die Legendre-Transformierte f^* konvex ist.

b) Sei f zweimal stetig differenzierbar und $\mathrm{Hess}_f(x)$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass f^* differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

c) Sei f strikt konvex. Zeige, dass dann $f^{**} = f$ ist.

Aufgabe 66. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \geq g$. Zeige, dass dann $f^{**} \geq g^{**}$ gilt.

Aufgabe 67. Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$. Zeige, dass dann $f^*(y) = \frac{1}{q}|y|^q$ gilt.

Aufgabe 68. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) + \langle z, x\rangle + c$. Zeige, dass dann $g^*(y) = f^*(y - z) - c$ gilt.

6 Differentiation

Den ersten Teil des Kapitels bilden Aufgaben über die Differentiation auf $\mathbb{R}$. Es folgen Aufgaben über mehrdimensionale Differentiation. Weitere Aufgaben zu diesem Thema finden sich z.B. im Kapitel über Optimierung.

Aufgabe 69. Definiere $f\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sqrt{1-x^2}$; der Graph dieser Funktion ist ein Halbkreis. Für $x \in [-1;1]$ ist dann $A = \big(x, f(x)\big)$ ein Punkt auf der Kreislinie. Zeige, dass die Tangente in A senkrecht auf die Gerade durch A und den Ursprung steht.

Beachte: Die Graphen zweier affiner Funktionen $x \mapsto ax+m$ und $x \mapsto bx+n$ stehen senkrecht aufeinander, wenn $a \cdot b = -1$ ist.

Aufgabe 70. Sei S die Sägezahnfunktion. Definiere die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} S(2^{2n}x).$$

a) Zeige, dass f dann eine stetige Funktion ist, die aber in keinem Intervall monoton ist.

b) Zeige, dass f in keinem Punkt differenzierbar ist.

Aufgabe 71. Berechne die Ableitung folgender Funktionen und skizziere Funktion und Ableitung.

a) $f_A(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ und $g_A(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$

b) $f_B(x) = x^x$ und $g_B(x) = \ln\big(\sinh(x)/\cosh(x)\big)$

c) $f_C(x) = x \cdot \ln(x) - x$ und $g_C(x) = x \cdot \sinh(x) - \cosh(x)$

Aufgabe 72. Berechne mit der Regel von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sin(\sqrt{x})}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{3^x - 4^x}{x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \downarrow 0} \ln(x) \cdot \tan(x).$$

Aufgabe 73. Definiere die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & \text{für } x > 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f beliebig oft differenzierbar ist, und dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom p_n, mit

$$f^{(n)}(x) := \begin{cases} p_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x}), & \text{für } x > 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gibt.

Aufgabe 74. Die Funktionen **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus** sind folgendermaßen definiert:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Beweise $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

b) Setze $g(y) := \ln\big(y + \sqrt{1+y^2}\big)$. Zeige, dass dann $g'(y) = 1/\sqrt{1+y^2}$ gilt.

c) sinh ist streng monoton wachsend.

d) Folgere aus Aufgabenteilen a), b) und c), dass die Umkehrfunktion $\operatorname{Ar}\sinh = \sinh^{-1}$ folgende Darstellung besitzt: $\operatorname{Ar}\sinh(y) = \ln\big(y + \sqrt{1+y^2}\big)$.

Aufgabe 75. Bestimme die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0, \text{ und} \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0, \text{ und} \\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 76. Für ein ideales Gas mit Druck p, Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $pV = cT$ (c konstant). Zeige, dass für ein solches Gas

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial V} = -1$$

Aufgabe 77. Definiere

$$p(t,x) \;=\; \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp(-\frac{|x|^2}{2t})$$

für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Zeige, dass p die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}p \;=\; \frac{1}{2}\Delta p$$

erfüllt, wobei sich der Laplace-Operator nur auf die x-Komponenten bezieht.

Aufgabe 78. Sei $U\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine orthogonale Transformation, d.h. $U(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und eine orthogonale Matrix A. Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dann $(\Delta f) \circ U = \Delta(f \circ U)$ gilt.

Aufgabe 79. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1/|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Berechne Δf.

Aufgabe 80. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Weiter sei g die Polarkoordinatendarstellung von f, d.h. $x(r,\varphi) = r \cdot cos(\varphi)$, $y(r,\varphi) = r \cdot \sin(\varphi)$ und $g(r,\varphi) = f(x,y)$. Zeige, dass dann folgendes gilt:

$$\Delta f \;=\; \frac{\partial^2}{\partial r^2}g + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}g + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}g.$$

Aufgabe 81. a) Gibt es eine differenzierbare, injektive Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $Df(x) = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}^3$?

b) Gibt es eine differenzierbare, nicht konstante Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 82. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass es ein $x \in \mathbb{R}^2$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(x) = \lambda \cdot x$ gibt.

Aufgabe 83. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in einer Nullumgebung und es gelte $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass es dann eine symmetrische Matrix A mit

$$f(x) \;=\; x^T A\, x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gibt.

Aufgabe 84. $R_1, \ldots, R_n$ seien n parallel geschaltete elektrische Widerstände und R sei der Gesamtwiederstand des Systems:

$$\frac{1}{R} \;=\; \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}.$$

Berechne $\frac{\partial R}{\partial R_k}$ und drücke das Ergebnis möglichst einfach durch R und R_k aus. Wie läßt sich das Resultat anschaulich erklären?

Aufgabe 85. Untersuche, in welchen Punkten des Definitionsbereichs die folgenden Abbildungen f eine differenzierbare Inverse besitzen. Finde möglichst große offene Mengen A und B, so dass $f\colon A \to B$ bijektiv und $f^{-1}\colon B \to A$ differenzierbar ist.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(r,\varphi,h) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ (Dies entspricht der Abbildung $z \mapsto z^2$ auf $\mathbb{C}$)

7 Optimierung

In diesem Abschnitt fasse ich die Aufgaben zusammen, die sich mit der Optimierung einer Funktione beschäftigen. Darunter fallen Aufgaben, die die Sätze über lokale Extrema oder über Lagrangemultiplikatioren verwenden.

Aufgabe 86. Eine zylinderförmige Dose hat ein Volumen von einem Liter. Wie muß man Höhe und Radius wählen, damit die Oberfläche der Dose minimal ist?

Aufgabe 87. Ein zufälliges Ereignis kann die möglichen Ausgänge $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 3$ haben. Diese treten mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$ ein. Es gilt $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ und $0 < p_i < 1$ für alle i.

Da wir die Wahrscheinlichkeiten p_i nicht kennen, soll uns ein Experte beraten. Er nennt uns Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ mit $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ und $0 < q_i < 1$ für alle i. Nachdem das Ereignis eingetreten ist, ist der tatsächliche Ausgang bekannt; also z.B. A_k. Die Bezahlung des Experten hängt von dem zufälligen Ergebnis und seiner Auskunft ab: bei Ausgang A_k zahlen wir ihm den Betrag $f(q_k)$ für eine differenzierbare Funktion f. Die Aufgabe ist es, eine differenzierbare Funktion f so zu wählen, dass es für den Experten möglichst günstig ist, uns die richtigen Werte zu nennen.

Dazu muß man sich über den zu erwartenden Gewinn des Experten Gedanken machen: mit Wahrscheinlichkeit p_i erhält der Experte von uns den Betrag $f(q_i)$. Sein erwarteter Lohn ist also $L(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f(q_i)$. Zu jeder Funktion f kann man das Maximum der Funktion L bestimmen. Wir wollen, dass das Maximum bei $q_i = p_i$ liegt, und da wir die p_i nicht kennen, soll das sogar für alle möglichen Werte der p_i gleichzeitig gelten. Daraus erhält man eine Bedingung an f mit deren Hilfe man f bestimmen kann. Welche Funktionen f helfen uns, den Experten ehrlich zu halten?

Aufgabe 88. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Zeige, dass dann

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|x - x_i\|^2$$

im Schwerpunkt $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ minimal wird.

Aufgabe 89. Beweise mit Hilfe des Satzes über lokale Extrema unter Nebenbedingungen die Tatsache, dass jede symmetrische Matrix einen reellen Eigenwert hat. Dazu kann man die Abbildung $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ unter der Nebenbedingung $\|x\|_2^2 = 1$ betrachten.

Aufgabe 90. Seien $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(w,x,y,z) &:= w^2 + x^2 - y + z \\ f_2(w,x,y,z) &:= w^2 + x^2 + y - z \end{aligned}$$

und $a \in M := \{f_1 = 0\} \cap \{f_2 = 0\}$. Zeige, dass dann folgende drei Aussagen gelten.

1) Es gibt keine offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $a \in \tilde{V}$, so dass es eine differenzierbare Bijektion $\varphi \colon V \to \tilde{V} \cap M$ gäbe. (Hier mag es nützlich sein, sich noch einmal die Aussage von Aufgabe 30 zu vergegenwärtigen.)

2) Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $v \perp \nabla f_1(a)$, $v \perp \nabla f_2(a)$, so dass $\gamma'(0) \neq v$ für alle differenzierbaren $\gamma \colon (-\varepsilon; +\varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = a$ gilt.

3) Es gibt eine Funktion $h \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, die in a ein lokales Extremum unter den Nebenbedingungen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ hat, aber für die $\operatorname{grad} h$ nicht in dem von $\nabla f_1(a)$ und $\nabla f_2(a)$ aufgespannten Unterraum liegt.

Aufgabe 91. Sei $P = \{\, p \in \mathbb{R}_+^n \mid p_1 + \cdots + p_n = 1 \,\}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsvektoren der Länge n und $h \colon \{1, 2, \ldots n\} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Weiter sei $E(p) := \sum_{i=1}^n p_i h(i)$ für alle $p \in P$ und $\min_i h(i) < E^* < \max_i h(i)$.

Zeige, dass die Entropie $H(p) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ auf $M = \{\, p \in P \mid E(p) = E^* \,\}$ ihr Maximum annimmt, und zwar in einem Punkt p der Form $p_i = \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{e}^{-\beta h(i)}$ für geeignete Werte $\beta, Z(\beta) \in \mathbb{R}$.

8 Integration

Hier finden sich Aufgaben zur Integration und zur elementaren Volumenbestimmung.

Aufgabe 92. Berechne mit Hilfe der Definition des Integrals die beiden Werte

$$\int_0^1 x\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 x^2\,dx.$$

Aufgabe 93. Berechne $\int_0^y a^x\,dx$ und $\int_1^y \ln(x)\,dx$.

Aufgabe 94. Bestimme die Stammfunktionen folgender Funktionen:

$$e^{-x}\sin^2(x), \qquad \frac{1}{1-x^4}, \qquad \frac{1+\tan(x)}{\sin(2x)} \qquad \text{und} \qquad \sin(x)\cdot\cos(x).$$

Aufgabe 95. Für Funktionen $f\colon[-1;1]\to\mathbb{R}$ definiere

$$S(f) \;=\; \frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1).$$

Finde die größte Zahl $n\in\mathbb{N}$, so dass die Beziehung $S(p) = \int_{-1}^1 p(x)\,dx$ für alle Polynome p mit $\mathrm{Grad}(p)\leq n$ gilt.

Aufgabe 96. (Partialbruchzerlegung) Seien $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ paarweise verschieden, $p(x) = (x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_n)$ und q ein Polynom mit $\mathrm{Grad}(q)<\mathrm{Grad}(p)$. Weiter sei

$$V \;=\; \left\{\frac{r}{p}\;\middle|\; r \text{ ist Polynom mit } \mathrm{Grad}(r)<\mathrm{Grad}(p)\right\}.$$

a) Zeige, dass $\dfrac{1}{x-x_i}$, $i=1,\dots,n$ linear unabhängige Elemente des Vektorraums V sind.

b) Zeige, dass es $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ gibt, mit

$$\frac{q}{p} \;=\; \sum_{i=1}^n \alpha_i\frac{1}{x-x_i}.$$

c) Bestimme die Stammfunktion von $\frac{1}{x-x_i}$ und daraus diejenige von $\frac{q}{p}$.

d) Berechne $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\frac{7}{6}x^2+\frac{5}{6}x-1}{x^3+2x^2-x-2}\,dx.$

Aufgabe 97. Ist $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, so definiert man

$$\int f(x)\,dx = \int \mathrm{Re}\,f(x)\,dx + i\int \mathrm{Im}\,f(x)\,dx.$$

Zeige, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ilx}\,dx \;=\; \delta_{kl}$$

für alle $k,l\in\mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 98. Definiere $C_0(\mathbb{R}) = \left\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\;\middle|\; f \text{ stetig}, \lim_{|x|\to\infty} f(x)=0\right\}$ sowie weiter $C_c(\mathbb{R}) = \left\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\;\middle|\; f \text{ stetig}, \mathrm{supp}(f) \text{ kompakt}\right\}$.

a) Zeige, dass $\left(C_c(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty\right)\subseteq\left(C_0(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty\right)$ dicht liegt.

b) Zeige, dass folgende Abbildung $I\colon\left(C_c(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty\right)\to\mathbb{R}$ unstetig ist.

$$I(f) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

Aufgabe 99. Sei $T\subseteq\mathbb{R}^3$ der Torus mit Radien $r<R$, also

$$T \;=\; \left\{x\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\mathrm{dist}(x,K)\leq r\right\}.$$

mit $K = \{\,(x,y,0)\mid x^2+y^2=R^2\,\}$. Berechne das Volumen $\mathrm{Vol}_3(T)$.

Aufgabe 100. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Wie kann man aus der Determinante $\det A$ das Volumen des Ellipsoids $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle \leq 1 \}$ berechnen?

Aufgabe 101. Sei $A_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, $A := A_0 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^3$. Die Menge

$$K := \Big\{\lambda a + (1-\lambda)b \;\Big|\; a \in A, \lambda \in [0;1]\Big\}$$

heißt **Kegel** mit Grundfläche A und Spitze b. Beweise, dass der Kegel Volumen $\lambda^2(A) \cdot |b_3|/3$ hat, wobei $\lambda^2(A)$ die Grundfläche und $|b_3|$ die Höhe des Kegels ist.

9 Kurven

Hier finden sich einige Aufgaben über Kurven im $\mathbb{R}^d$.

Aufgabe 102. Sei $x \in [0;2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ und $P_k := \exp(i\frac{k}{n}x)$ für $k := 0,\dots,n$. Weiter sei L_n die Länge des Streckenzugs in der komplexen Zahlenebene, der die Punkte $P_0, P_1, \dots, P_n$ miteinander verbindet. Beweise, dass $\lim_{n\to\infty} L_n = x$ gilt.

Aufgabe 103. Sei $\gamma\colon [0;1] \to \mathbb{R}^3$ eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurve von $(1,0,0)$ nach $(3,4,5)$.

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x) = -\alpha x$ mit $\alpha > 0$. Zeige, daß das Kurvenintegral $\int_\gamma f$ nicht von der Wahl der Kurve γ abhängt und bestimme den Wert des Integrals.

b) Finde ein Beispiel für ein Vektorfeld g, so daß für g das Kurvenintegral von der Wahl des Weges abhängt.

Aufgabe 104. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = 1$. Weiter sei C die Menge aller differenzierbaren Kurven $\varphi\colon (-\varepsilon;\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0$, die $\|\varphi(t)\|_2 = 1$ für alle $t \in (-\varepsilon;\varepsilon)$ und $\varphi(0) = x$ erfüllen. Zeige, dass dann

$$\Big\{y \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; y \perp x\Big\} = \Big\{\varphi'(0) \;\Big|\; \varphi \in C\Big\}$$

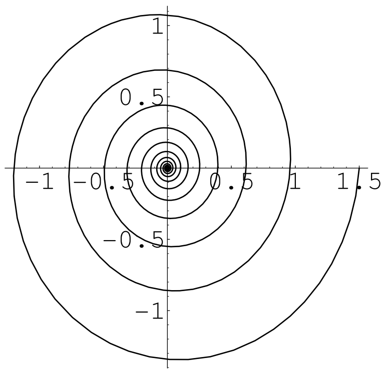
gilt.

Aufgabe 105. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei die Kurve $\varphi_\lambda\colon [0;\pi] \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\varphi_\lambda(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \lambda \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } t \in [0;\pi]$$

definiert. Für welches λ wird die Länge $\int_0^\pi \|\varphi_\lambda'(t)\|_2^2 \, dt$ der Kurve im Raum minimal.

Aufgabe 106. a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $r\colon I \to \mathbb{R}_+$ stetig differenzierbar. Weiter sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit der Polarkoordinatendarstellung $\big(\varphi, r(\varphi)\big)$. Zeige, daß die Länge der Kurve $\int_I \sqrt{r(s)^2 + r'(s)^2}\, ds$ ist.



b) Sei $I = (-\infty; 0]$, $\alpha \in (0; \pi/2)$ und $r(\varphi) = \alpha \exp(\varphi \cot \alpha)$ für alle $\varphi \in I$. Die Kurve γ aus Teil a) ist dann eine Spirale, die alle radialen Linien im Winkel α schneidet. Bestimme die Länge der Kurve. Ist sie endlich?

Aufgabe 107. Sei $\varphi\colon [a; b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Beweise dann

$$\int_a^b \left\|\varphi'(t)\right\|_2 dt \;=\; \sup\left\{\sum_{i=1}^n \left\|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\right\|_2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le b\right\}.$$

Aufgabe 108. Sei $\gamma\colon [a; b] \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Kurve. Wir wollen zeigen, daß sich diese Kurve gut durch einen Polygonzug approximieren läßt. Eine Partition von $[a; b]$ mit Feinheit η ist eine Familie $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und $\max\{t_1 - t_0, \ldots, t_n - t_{n-1}\} = \eta$. Aus so einer Partition erhält man einen Polygonzug, indem man die Punkte $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)$ der Reihe nach miteinander verbindet.

Zeige, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß sich für jede Partition $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ des Intervalls $[a; b]$ mit Feinheit kleiner δ die Länge des zugehörigen Polygonzugs von der Länge der Kurve um höchstens ε unterscheidet.

10 Maßtheorie und Lebesgueintegral

In diesem Abschnitt finden sich Aufgaben über Maßtheorie und über das Lebesgueintegral. Das Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^d$ wird in den Aufgaben mit λ^d bezeichnet, die Borel-σ-Algebra mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 109. Sei M eine Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von Teilmengen von M heißt **Algebra** auf M, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

1) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
2) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$ und $A \cap B \in \mathcal{A}$.
3) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

$X \in \mathcal{A}$ heißt **Atom** von $\mathcal{A}$, falls für jedes Paar von Punkten $a, b \in X$ und jede Menge $A \in \mathcal{A}$ entweder $a, b \in A$ oder $a, b \notin A$ gilt.

a) Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Algebren auf M. Zeige, dass dann der Schnitt $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ ebenfalls eine Algebra ist.

b) Sei $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Wie läßt sich

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) \;=\; \bigcap\left\{\mathcal{A} \;\middle|\; \mathcal{A} \text{ ist Algebra auf } M \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\right\}$$

mit Hilfe der Atome von $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ darstellen?

Aufgabe 110. Sei X eine Menge. Zeige, dass die von den einpunktigen Mengen in X erzeugte σ-Algebra gerade aus den abzählbaren Mengen und deren Komplementen besteht, d.h. dass folgendes gilt:

$$\sigma\Big(\big\{\{x\} \;\big|\; x \in X\big\}\Big) \;=\; \big\{A \;\big|\; A \subseteq X \text{ abzählbar}\big\} \cup \big\{X \setminus A \;\big|\; A \subseteq X \text{ abzählbar}\big\}.$$

Aufgabe 111. a) Seien X, Y Mengen, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Für $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ definiere $f^{-1}(\mathcal{A}) := \big\{f^{-1}(A) \;\big|\; A \in \mathcal{A}\big\}$. Zeige, dass dann $f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{E})\big) = \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{E})\big)$ gilt.

b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ stetig. Zeige, dass dann $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ gilt.

Aufgabe 112. Hier soll gezeigt werden, dass es eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ gibt, die keine Borelmenge ist. Definiere folgende Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$: $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Q}$ ist. Mittels des Auswahlaxioms kann man simultan aus jeder der Äquivalenzklassen ein Element auswählen, das sogar im Intervall $[0; 1)$ liegt. V sei die Menge all dieser Elemente. Beweise, dass V keine Borelmenge ist.

Tip: Man kann sich z.B. zunächst $\mathbb{R} = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}} (V + a)$ und $[0; 2) \supseteq \dot{\bigcup}_{a\in\mathbb{Q}\cap[0;1)} (V + a)$ überlegen.

Aufgabe 113. Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}\Big(\Big\{[a;b) \;\Big|\; a,b \in \mathbb{R}, a < b\Big\}\Big)$ die von den halboffenen Intervallen erzeugte Algebra. Für $A \in \mathcal{A}$ definiere $m(A) = 1$, falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\varepsilon;0) \subseteq A$ gibt, und $m(A) = 0$ sonst. Zeige, dass m additiv ist aber nicht zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 114. (Diracmaß) Sei X eine Menge und $a \in X$. Zeige, dass durch $\delta_a(A) = 1_A(a)$ für alle $A \subseteq X$ ein Maß δ_a auf der Potenzmenge von X definiert wird.

Aufgabe 115. (Zählmaß) Sei X eine Menge und für $A \subseteq X$ sei $\mu(A)$ definiert als die Zahl der Elemente von A. Diese kann natürlich den Wert $+\infty$ annehmen. Zeige, dass μ ein Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist.

Aufgabe 116. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung f' meßbar ist.

Aufgabe 117. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Abbildung.

a) Definiere $\bar{f}$ durch $\bar{f}(x) = \limsup_{y\to x} f(x)$. Zeige, dass $\bar{f}$ meßbar ist. (Tip: Man kann zeigen, dass $\{\bar{f} < a\}$ für alle a offen ist.)

b) Zeige, dass die Menge aller Punkte, in denen f stetig ist, eine meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. (Tip: Betrachte auch $\underline{f}$.)

Aufgabe 118. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n \subseteq \mathbb{R}^2$ der Graph von f_n und weiter $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Zeige, dass dann $\lambda^2(A) = 0$ ist.

Aufgabe 119. Sei $T = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x^2 + y^2 \leq \exp(-\frac{(z+1)^2}{2})(z+1)\Big\}$. Skizziere T und bestimme das Lebesguemaß $\lambda^3(T)$.

Aufgabe 120. Sei λ des Lebesguemaß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Finde Mengen $A, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $A_n \downarrow A$ aber $\lambda(A_n) \not\to \lambda(A)$.

Aufgabe 121. Sei $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Mengen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Setze

$$A = \{\, x \in X \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } A_n \,\}.$$

Zeige, dass A meßbar ist und dass $\mu(A) = 0$ gilt.