Bemerkungen zu B-Spline-Kurven

Jochen Voß

7. Februar 2002

Dieser Text faßt einige Ergebnisse über B-Spline-Kurven zusammen. Quellen sind meine Mitschrift der Prama-Vorlesung und die Bücher von Werner sowie von Hoschek und Lasser.

Zur Notation: Hoschek und Lasser verwenden andere Bezeichnungen. Was bei mir $B_{i,k}$ heißt, heißt dort $N_{i,k+1}$.

Im folgenden sei $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine monoton steigende Folge reeller Zahlen mit $\lim_{i\to\infty} t_i = +\infty$ und $\lim_{i\to-\infty} t_i = -\infty$. Diese Folge heißt hier **Knotenfolge**, die t_i heißen **Knotenpunkte**. Diese Folgenglieder werden später eine Interpretation als Werte im Parameterbereich der Splinekurve gewinnen.

Definition. Die **B-Spline-Funktionen** $B_{i,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grade k werden rekursiv durch folgende Vorschrift definiert:

$$\begin{aligned} B_{i,0}(t) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in [t_i; t_{i+1}), \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ B_{i,k}(t) &= \omega_{i,k}(t) B_{i,k-1}(t) + \bigl(1 - \omega_{i+1,k}(t)\bigr) B_{i+1,k-1}(t) \end{aligned}$$

mit

$$\omega_{i,k}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}, & \text{falls } t_i < t_{i+k}, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das nächste Lemma nennt einige grundlegende Eigenschaften der B-Spline-Funktionen.

Lemma 1. Sei $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Knotenfolge wie oben, $k \in \mathbb{N}_0$ und $(B_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$ die zugehörigen B-Spline-Funktionen vom Grad k. Dann gilt

1. Es ist $B_{i,k} \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und $\sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{i,k} = 1$.
2. Für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung $B_{i,k}|_{[t_j;t_{j+1})}$ ein Polynom vom Grad k.
3. Für $t_i < t_{i+k+1}$ ist der Träger $\operatorname{supp}(B_{i,k}) = [t_i; t_{i+k+1}]$, ansonsten ist $B_{i,k} = 0$.
4. Fallen l Werte der Knotenfolge zusammen, so ist $B_{i,k}$ an dieser Stelle $(k-l)$-mal differenzierbar. Falls die Knotenfolge streng monoton steigend ist, ist $B_{i,k}$ insbesondere eine $(k-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion.

Wie die Definition zeigt, gehen in die Berechnung von $B_{i,k}$ nur die Werte $t_i, \ldots, t_{i+k+1}$ der Knotenfolge ein. Für $t \in [t_j; t_{j+1})$ ist umgekehrt

$$\{\, i \in \mathbb{Z} \mid B_{i,k}(t) \neq 0 \,\} = \{\, i \in \mathbb{Z} \mid t_i \leq t < t_{i+k+1} \,\} = \{j-k, \ldots, j\}$$

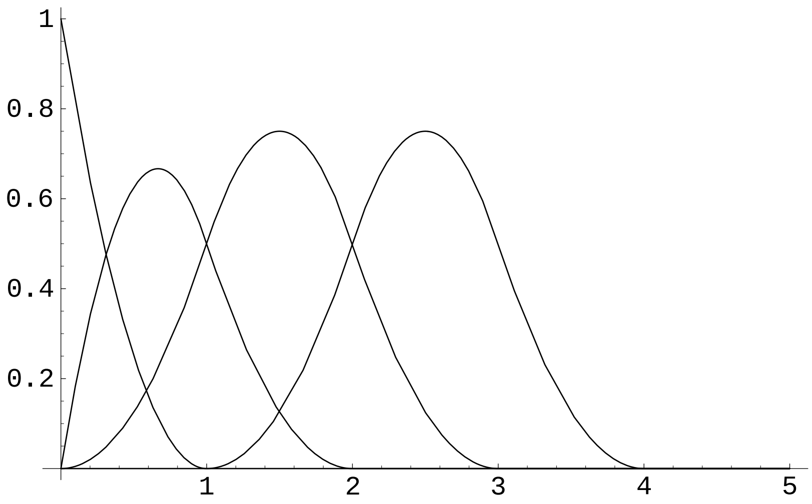

Abbildung 1: Die B-Spline-Funktionen $B_{-2,2}$, $B_{-1,2}$, $B_{0,2}$ und $B_{1,2}$ zu der Knotenfolge $t_{-2} = t_{-1} = t_0 = 0$, $t_1 = 1$, …, $t_4 = 4$. Durch das Zusammenfallen der Werte t_{-2} bis t_0 sinkt die Differenzierbarkeit der $B_{i,2}$ im Punkt $t = 0$: $B_{-2,2}$ ist unstetig in 0, $B_{-1,2}$ ist in 0 zwar stetig, aber nicht differenzierbar.

Wegen der ersten Aussage des Lemmas kann man die $(B_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$ als Gewichte einer Konvexkombination betrachten. Damit wird folgende Definition sinnvoll.

Definition. Sei $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Knotenfolge wie oben, $k \in \mathbb{N}_0$ und $(B_{i,k})_{i\in\mathbb{Z}}$ die zugehörigen B-Spline-Funktionen vom Grad k. Weiter sei $(d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Punkten im $\mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt die Kurve $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ mit

$$x(t) \;=\; \sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{i,k}(t) d_i$$

eine **B-Spline-Kurve** vom Grad k. Die d_i heißen **Kontrollpunkte**. Das Polygon, das die Kontrolpunkte (d_i) verbindet heißt **de Boor-Polygon**.

Für die Summe in der Definition von $x(t)$ tragen nur endlich viele Summanden bei: für $t \in [t_j; t_{j+1})$ muß man nur über den Bereich $i \in \{j-k, \dots, j\}$ summieren. In die Rechnung gehen dann die Knotenpunkte $t_{j-k}, \dots, t_{j+k+1}$ und die Kontrolpunkte $d_{j-k}, \dots, d_j$ ein.

Lemma 2. (Eigenschaften von B-Spline-Kurven) Sei $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Knotenfolge, $(d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Kontrollpunkten, $k \in \mathbb{N}_0$ und $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ die zugehörige B-Spline-Kurve vom Grad k. Dann gelten folgende Aussagen.

1. Die Abbildung x ist zwischen den Knotenpunkten beliebig oft differenzierbar.

2. Fallen l Werte der Knotenfolge zusammen, so ist die Kurve x an dieser Stelle $(k-l)$-mal differenzierbar.

3. Für $t \in [t_j; t_{j+1})$ liegt $x(t)$ in der konvexen Hülle der Kontrolpunkte $d_{j-k}, \dots, d_j$.

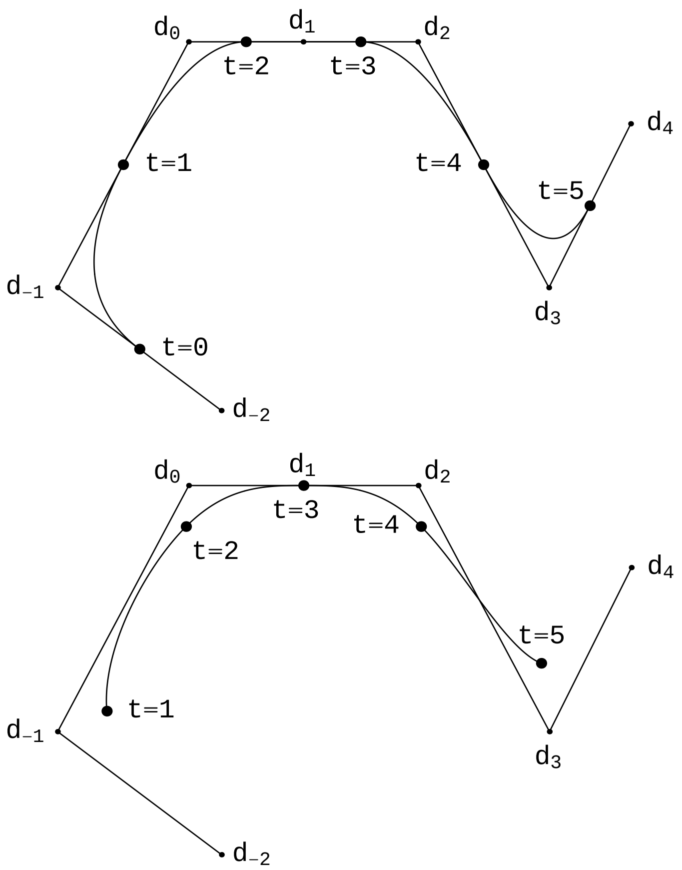

Abbildung 2: Zwei Splinekurven mit übereinstimmenden Kontrolpunkten. Im oberen Bild ist der Grad $k = 2$, im unteren Bild $k = 3$.

4. Liegen k aufeinanderfolgende Kontrolpunkte auf einer Geraden, so berührt die Splinekurve das de Boor-Polygon.

5. Liegen $k+1$ aufeinanderfolgende Kontrolpunkte auf einer Geraden, so hat die Splinekurve mit dem de Boor-Polygon ein Geradenstück gemeinsam.

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der B-Spline-Funktionen.

Die obige Überlegung zeigt, daß die Summation aus der Definition von $x(t)$ für $t \in [t_j; t_{j+1})$ nur über die Indizes $i = j - k, \ldots, j$ ausgeführt werden muß. Also ist $x(t)$ eine Konvexkombination der Punkte $d_{j-k}, \ldots, d_j$. Dies beweist die dritte Eigenschaft.

Die Beweise für die beiden letzten Eigenschaften kenne ich nicht. (q.e.d.)

Nach dem Lemma sind Splinekurven für $k > 1$ differenzierbar. Die Ableitung ist eine Splinekurve mit Grad $k-1$. Es gilt

$$x'(t) \;=\; \sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{i,k-1}(t)\,\frac{k}{t_{i+k}-t_i}(d_i-d_{i-1}).$$

Das folgende Lemma liefert eine effiziente Möglichkeit zu vorgegebenen Knotenpunkten und Kontrolpunkten den Wert $x(t)$ zu bestimmen.

Lemma 3. Sei $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Knotenfolge, $(d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Kontrollpunkten und $k \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $t \in [t_j; t_{j+1})$. Definiere die Punkte d_i^r für $i = j-k+r, \ldots, j$ und $r = 0, \ldots, k$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} d_i^0 &= d_i \\ d_i^r &= \omega_{i,k-r+1}(t)d_i^{r-1} + \big(1-\omega_{i,k-r+1}(t)\big)d_{i-1}^{r-1} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$x(t) \;=\; \sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{i,k-r}(t)d_i^r$$

für alle $r = 0, \ldots, k$. Insbesondere ist $x(t) = d_j^k$.

Durch einfaches Einsetzen in die Definition von ω erhält man

$$\omega_{i,k-r+1}(t) \;=\; \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+k-r+1}-t_i}, & \text{falls } t_i < t_{i+k-r+1}, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Indem man iterativ die d_i^1, d_i^2 und schließlich d_j^k berechnet, kann man numerisch einzelne Punkte der Splinekurve bestimmen.